

掌握图形图像表征策略,提升解决 真实情境复杂问题的能力

黎国胜 罗 恒

(四川省双流中学)

本文结合典型例题介绍利用图形图像表征的两种策略,可以帮助学生打通思维堵点,快速高效地解决复杂问题。

1.利用点线等几何图形表征物体的运动过程

1.1 原题呈现

将图 1(a)中的蹦床简化为图 1(b)所示的弹簧,当质量 50 kg 的运动员站在蹦床上静止时,弹簧的上端由 O 点压缩到 A 点。现将比赛过程分为两段,过程 1:运动员从 A 点开始,通过多次起跳,在空中完成动作,且越跳越高,直至重心达到距 O 点高为 6 m 的最高点(此时运动员的速度为零);过程 2:运动员在最高点结束表演,此后不做任何动作,多次往返,最后静止在蹦床上,弹回过程中重心与 O 点最大高度差为 4.1 m。若整个过程中运动员所受空气阻力大小恒为重力的 0.2,重力加速度大小为 10 m/s^2 。则 ()

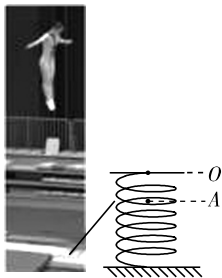


图 1

A.过程 1 中运动员能够越跳越高,是因为弹簧对运动员不断做正功

B.在过程 2 的每一次单向向上运动过程中,运

动员的速度最大时弹簧的上端都处于 A 点下方

C.过程 2 中从开始下落到弹至重心距 O 点高 4.1 m 处,运动员克服空气阻力做的功为 1 010 J

D.过程 2 中,弹簧的最大弹性势能为 2 280 J

1.2 试题疑难分析

(1)对蹦床模型的认识与理解,即对运动员在蹦床上的大致运动阶段以及各阶段临界状态模糊不清;

(2)各选项所涉及问题无法与所学知识有效联系,即问题表征与解题策略的选择,比如 A 选项弹力做功正负情况的判断,B 选项运动员速度最大时弹簧的上端位置以及 CD 选项中力所做的功和最大弹性势能与所学的什么知识有联系等;

(3)对题目中运动员的“重心”的理解,尤其是与“重心”相关的几个位置,比如,运动员脚底的位置、在蹦床上静止时的平衡位置、弹簧原长的位置以及运动员重心的位置与变化(尤其是重心的最高与最低位置及其变化)等,对于学生是否能正确、有效表征问题有重要影响。但解决此题并非所有条件都是必要的,因此,学生还应具备从众多信息中抓住“主要矛盾”,忽略“次要因素”的能力。

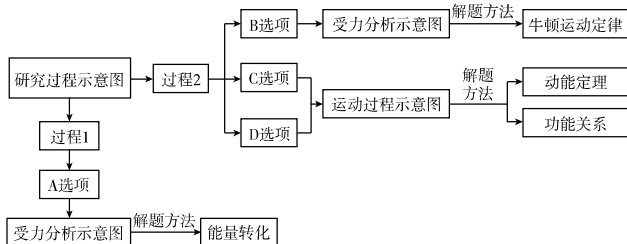


图 2 第 21 题利用图形的问题表征过程及解题方法的选择

分析运动员的运动过程时,首先要明确运动员不能看成质点,因为运动员有身高,而且题目中明确了重心的变化。在画运动过程示意图时,我们重点关注几个关键位置:重心的最高位置和最低位置(用几何点表征),弹簧原长位置(O 点)及弹簧的最低位置(用点表示),运动员静止时的位置(A 点)。本题的难点在于,初始时刻运动员的重心位置在弹簧原长的上方还是下方,无法判断,可以假设。

A选项:“运动员能够越跳越高”,对应的过程不止一次的上下运动,而应是多次落下来再弹上去。下落过程从接触弹簧到速度减为零,弹簧对运动员做负功,运动员的机械能转化为弹簧的势能。反弹上升的过程,弹簧对运动员做等量的正功,弹簧的势能又全部转化为运动员的机械能。因此,运动员越跳越高的原因肯定不是弹簧做正功的结果,从能量转化的角度看只能是运动员内力做功的结果,消耗了运动员的生物能。一些学生想当然地认为上升过程,弹簧对运动员做了正功,所以运动员越跳越高,说明这些学生能量转化的物理观念还没有真正建立起来,也缺乏应用能量转化的观念去分析生活现象。

B选项:运动员静止时,重力与弹力等大反向,二力平衡。运动员向上运动的过程中,速度最大时受重力、弹簧的弹力、竖直向下的空气阻力,三力平衡,画出受力如图3所示,易知弹簧弹力变大了,弹簧压缩量更大,此位置应该在 A 点的下方,B正确。

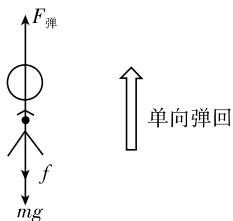


图3 运动员向上运动的受力示意图

1.3 利用图形表征求解 CD 选项

根据题意,将蹦床简化为弹簧,运动员站在蹦床上静止时,弹簧的上端由 O 点压缩到 A 点,示意图如图4所示,其中 W 表示人重心的位置,由于现在尚不清楚重心的位置,暂假设静止时人的重心位于 O 点上方。再将题目中所描述的运动员比赛过程1与过程2简化为如图5所示的运动过程示意图,其中 B 点为重心距 O 点的最高点, $H=6\text{ m}$, C 点为弹回过程中重心距 O 点的最高点, $h=4.1\text{ m}$ 。

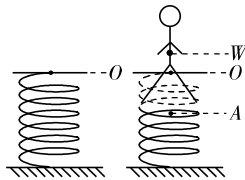


图4 构建蹦床的弹簧模型

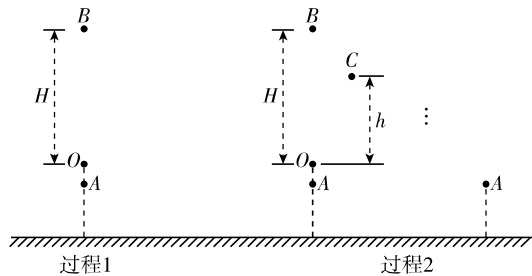


图5 点线等表征运动员的运动过程

对于C选项,在过程2中,根据图5,运动员从 B 到 C 运动,由动能定理有 $mg(H-h) - W_f = 0$ 代入数据可得运动员克服空气阻力做的功 $W_f = 950\text{ J}$,故C选项错误。

对于D选项,由于运动员从 B 处下落至压缩弹簧到最低点处时,运动员重心位置暂不能确定,可假设运动员从 B 处至重心与 O 点齐平后,重心继续下落至 D 点且 O 、 D 两点高度差为 Δh ,并将从 B 到 C 的运动示意图简化为如图6所示。运动员从 B 到 D ,根据功能关系有 $mg(H+\Delta h) - f(H+\Delta h) = E_{p\text{弹}}$ 。运动员从 B 到 C ,根据动能定理有 $mg(H-h) - f(H+h+2\Delta h) = 0$,代入数

据,可解得 $E_{p\text{弹}} = 2\ 280\ \text{J}$,故 D 选项正确。值得注意的是 $\Delta h = -0.3\ \text{m}$,其中负号表示运动员运动到最低点时,其重心位置位于弹簧原长位置 O 点上方,因此,运动员静止时重心 W 也位于 O 点上方。

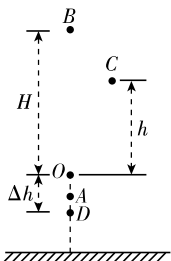


图 6 运动员从最高点下落至弹回最高点的图形表征

2. 用速度—时间图像表征物体的运动规律

2.1 原题呈现

如图 7,用水平传送带向右运送货物,传送带左、右端点 A 、 B 间距为 $L = 24.5\ \text{m}$, $M = 1\ \text{kg}$ 、长度 $d = 1.5\ \text{m}$ 。现将质量 $m = 2\ \text{kg}$ 的货物放入静止的木箱,木箱左侧位于 A 端,货物恰与木箱左侧壁接触。放入货物后,传送带由静止开始依次做匀加速运动、匀速运动和匀减速运动直到静止,木箱在传送带匀速运动中的某时刻与传送带共速,且停止运动时其右侧刚好在 B 端,该过程中,传送带减速段、加速段的加速度大小均为 $a_0 = 4\ \text{m/s}^2$,最大速度 $v_0 = 4\ \text{m/s}$ 。已知木箱与货物间的动摩擦因数 $\mu_1 = 0.1$,木箱与传送带间的动摩擦因数 $\mu_2 = 0.2$,重力加速度大小 $g = 10\ \text{m/s}^2$ 。货物可视为质点,货物与木箱间的碰撞为时间不计的完全非弹性碰撞,最大静摩擦力等于滑动摩擦力。求:

- (1) 传送带加速运动过程中,货物对木箱侧壁的压力大小;
- (2) 传送带减速运动过程中,系统因摩擦产生的热量;
- (3) 传送带匀速运动的时间。

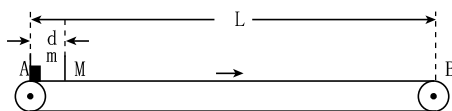


图 7

2.2 试题疑难分析

(1) 货物、木箱和传送带运动状态以及各个运动阶段分界点的判断;

(2) 货物、木箱以及传送带各自对地位移与相对位移(或相对路程)的计算。

上述疑难点均可通过利用图形、图像进行表征,使问题更加清晰与明确。

图 8 为利用图形表征该问题的步骤。解决问题时,首先应该明确研究对象,即传送带(以传送带上 A 端的点为研究对象)、木箱与货物。其中传送带由电动机带动,其运动状态分为匀加速、匀速与匀减速三个阶段。对于木箱与货物的运动状态必须结合受力分析进行判断,而受力分析时应灵活选用整体法与隔离法对运动状态进行确定。

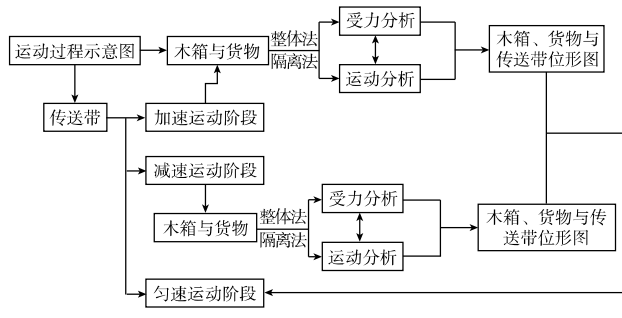


图 8 图形、图像表征过程

对于第(1)小问,根据受力分析示意图,利用牛顿运动定律即可顺利解决。第(2)小问将研究过程聚焦于传送带匀减速阶段,而对货物与木箱的运动情况的分析是解题的突破口,由于题设条件尚无法明确判断二者的运动情况,故而采用了假设法,这是一种常用且有效的方法。对于第(3)小问,在解决(1)(2)小问的基础上,利用题设已知条件,作出全过程、各阶段,货物、木箱以及传送带的位形图,

传送带匀速运动的位移由几何关系可快速得到,问题也便迎刃而解。

2.3 利用图形、图像表征的具体解题过程

(1) 解法一

I. 传动带匀加速运动阶段

传送带启动后向右做匀加速运动,货物和木箱一起相对于传送带向左滑动,对于货物和木箱,分别采用整体法与隔离法对货物和木箱整体以及货物进行受力分析,其受力分析示意图如图 9 所示。对于货物和木箱整体,由牛顿第二定律有 $\mu_2(M+m)g = (M+m)a$,代入数据解得 $a = 2 \text{ m/s}^2$ 。对于货物,因 $\mu_1 = 0.1$,仅靠静摩擦力提供的最大加速度为 $\mu_1 g = 1 \text{ m/s}^2$,所以木箱对货物的静摩擦力不仅达到最大值,且左侧壁对货物还施加有压力 F 。对于货物,由牛顿第二定律有 $\mu_1 mg + F = ma$,根据牛顿第三定律,货物对木箱侧壁的压力大小为

$$F' = F = 2 \text{ N}.$$



木箱与货物整体受力分析示意图 货物受力分析示意图

图 9 传送带加速阶段木箱与货物的受力示意图

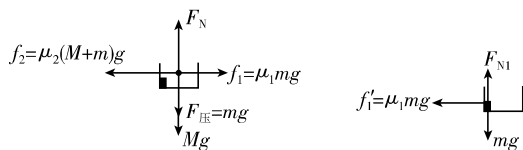
传送带匀速运动的速度为 $v_0 = 4 \text{ m/s}$,根据 $v_0 = a_0 t_{\text{加}}$,可知传送带加速的时间 $t_{\text{加}} = 1 \text{ s}$,此后传送带做匀速直线运动。木箱与货物整体加速,根据 $v_0 = at'_{\text{加}}$,可知经过 $t'_{\text{加}} = 2 \text{ s}$,木箱、货物与传送带达到共速。整个过程,传送带位移 $x = \frac{1}{2} a_0 t_{\text{加}}^2 + v_0(t'_{\text{加}} - t_{\text{加}}) = 6 \text{ m}$,其中传送带加速位移 $x_{\text{加}} = 2 \text{ m}$,木箱与货物位移 $x'_{\text{加}} = \frac{1}{2} at_{\text{加}}'^2 = 4 \text{ m}$,位置示意图如图 10 所示,其中 A'_1 表示此过程中传送带最初在 A 端的点的位置。



图 10 传送带与木箱和货物均加速结束时位置示意图

II. 传动带匀减速运动阶段

欲求解此过程中,系统因摩擦产生的热量,必须清楚货物、木箱以及传送带之间的相对运动情况。在此过程中,可知货物一定相对于木箱向右滑动,而木箱是否相对传送带滑动需进行判断,不妨假设木箱会相对传送带滑动,分别对木箱以及传送带进行受力分析,示意图如图 11 所示。根据牛顿第二定律,对木箱、货物分别有 $\mu_2(M+m)g - \mu_1 mg = Ma_2$, $\mu_1 mg = ma_1$ 代入数据解得 $a_1 = 1 \text{ m/s}^2$, $a_2 = a_0 = 4 \text{ m/s}^2$,故而木箱相对传送带静止且一起做减速运动。



木箱受力分析示意图 货物受力分析示意图

图 11 传送带减速运动时木箱和货物受力分析示意图

此时尚无法判断此后货物与木箱的碰撞及运动情况,不妨假设木箱与传送带一起减速至零,而后货物再与木箱发生碰撞。设传送带速度由 v_0 减到零所用时间为 $t_{\text{减}}$,由运动学规律有 $0 - v_0 = -a_2 t_{\text{减}}$,可得 $t_{\text{减}} = 1 \text{ s}$ 。此过程货物的位移为 $x_1 = v_0 t_{\text{减}} - \frac{1}{2} a_1 t_{\text{减}}^2 = 3.5 \text{ m}$,木箱的位移为 $x_2 = \frac{v_0}{2} t_{\text{减}} =$

2 m, 二者相对滑动的距离 $\Delta x = x_1 - x_2 = 1.5 \text{ m} = d$, 所以木箱速度第一次减小到零时, 货物与木箱右侧刚好发生碰撞, 此后一起减速运动。因此, 传送带减速运动过程中, 因摩擦而产生的热量为 $Q =$

$\mu_1 mg \Delta x = 3 \text{ J}$ 。此过程的运动示意图如图 12 所示, 其中 A'_2 表示传送带匀速运动阶段结束时最初在 A 端的点的位置, A'_3 即为传送带静止时最初在 A 端的点的位置。



图 12 传送带静止时位形图

III. 传动带匀速运动阶段

欲求传送带匀速运动时间, 我们需找到其匀速运动的位移 l , 如图 13 所示。不难看出, 我们只需找到货物与木箱碰撞后一起减速至零所运动的位移 x_3 即可。货物与木箱间发生的是完全非弹性碰撞, 设碰撞前后货物的速度分别为 v 和 $v_{共}$, 由运动

学规律有 $v = v_0 - a_1 t_{减} = 3 \text{ m/s}$ 。由动量守恒定律有 $mv = (M + m)v_{共}$, 解得 $v_{共} = 2 \text{ m/s}$ 。由动能定理有 $-\mu_2 (M + m)gx_3 = 0 - \frac{1}{2}(m + M)v_{共}^2$, 解得 $x_3 = 1 \text{ m}$ 。由几何关系可得 $l = L - x_m - d - x_3 = v_0 t_{匀}$, 解得 $t_{匀} = 5 \text{ s}$ 。

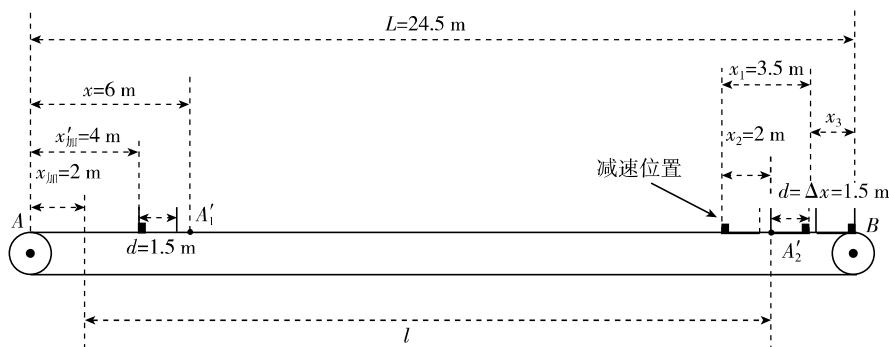


图 13 木箱静止时位形图

(2) 解法二: 利用 $v-t$ 图像

通过受力分析与运动分析, 在同一坐标轴上分别做出传送带、木箱、货物以及木箱与货物的 $v-t$ 图像, 如图 14 所示。其中 OA 段表示传送带匀加速运动阶段, OB 段表示木箱与货物一起匀加速运动阶段, BC 段表示三者共速且匀速运动阶段, CD 段表示木箱与传送带一起匀减速运动阶段, CE 段表示货物减速运动阶段, EF 段表示货物与木箱完全非弹性碰撞瞬间, FG 段表示货物与木箱一起匀

减速运动阶段, G 点所对应时刻木箱右侧恰好位于传送带右端 B 点处。根据 $v-t$ 图像与横坐标所围成的面积可得传送带、木箱及货物各个过程运动位移, 其余步骤同解法一。

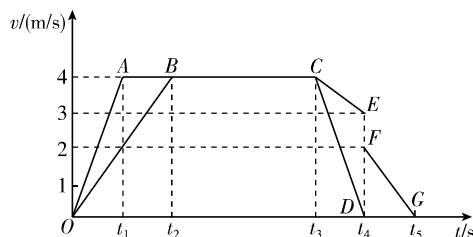


图 14 全过程 $v-t$ 图像